A CONTAS COM A GEOMETRIA (I)

Imagine-se, por absurdo, que fazíamos uma fila indiana com todos os cidadãos do mundo. Todos os homens e mulheres alinhados por ordem alfabética do nome. Uma linha muito comprida, a perder de vista, um conjunto "infinito" com os cidadãos todos postos por ordem do nome. Essa é, mais ou menos, a ideia que se pode fazer do conjunto de números reais, a recta real, R, que inclui inteiros e fracções e muito mais. Sim, os números são a perder de vista e estão todos colocados em ordem, nenhum sendo mais importante que outro. Todos têm um nome e um lugar. Por exemplo, os números $4^3<3^4$, ou seja, o 64=4x4x4 é menor que o 81=3x3x3x3. Outro exemplo, o 56^{57} e o 57^{56} têm o seu lugar: um é número ímpar, outro é par (qual? fácil); logo um é menor que o outro (difícil).

O que interessa a seguir é, somente, que R , a **recta**, é um linha, tão comprida quanto quisermos, um "comprimento sem espessura" como dizia o grande Euclides… Pois... Vamos agora chamar C à **circunferência**, que é uma linha R a que se ataram as pontas. Se se quiser, C é uma argola com 1 metro *por aí* de diâmetro... Brincadeira. As medidas, aqui, não interessam. Podemos até imaginar C como um novelo de linha ao qual se ataram as pontas.

C e R ou R e C, tudo isto, são conjuntos de pontos. "Conjuntos" são conjuntos de pontos e denotam-se com chavetas. Por exemplo, {1,3,4} é um conjunto de três pontos da recta, o 1, o 3 e o 4.

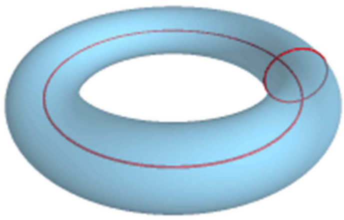
Eis as contas de "vezes" com a geometria que queremos mostrar. Dados dois conjuntos quaisquer, A e B, vamos fazer o seguinte **produto**, AxB. O resultado da operação x é um novo conjunto de pontos (a,b), tipo "pares-de-pontos":

$$A\text{x}B =\{\ (a,b)\ ,\ \text{ onde } a \text{ pertence a } A \text{ e } b \text{ pertence a } B\ \}.$$

Os pares-de-pontos são pontos, são as próprias *coordenadas* dos pontos de AxB. Por exemplo, {1,3,4}x{2,3}={(1,2),(1,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)} e tal pode-se ver numa quadrícula ou tabela de duas entradas.

Ao conjunto RxR=P vamos chamar **plano**. E como imaginar um plano P? Bom, uma folha infinita e sem espessura de papel quadriculado, ou um pedaço da superfície de um espelho, ou o Mar da Palha visto da Ponte Vasco da Gama numa manhã de calmaria.

E o que resultará de RxC? Não será como a superfície de um cilindro, de um tubo? Então e CxC? CxC parece uma bóia ou um bolo "dónute" ou "rosca", pois é um quadriculado de circunferências. E podemos continuar… Mas não tão depressa.



Em geometria convém definir **dimensão**. As linhas como R ou C têm dimensão 1. As **superfícies** são os *espaços* de dimensão 2. O plano P, o cilindro RxC, ou o dónute CxC têm dimensão 2=1+1. A operação x entre dois conjuntos A e B ajuda a dar uma noção clara. A saber:

$$\text{dimensão } (A\text{x}B) = \text{dimensão } (A) + \text{dimensão } (B).$$

Então, agora sim, o produto do plano com uma recta deve ser PxR=RxRxR, o **espaço tri-**

dimensional, onde se diz que *vivemos*. Então e CxCxC, será fácil imaginar? Sim e não. Imagine-se uma circunferência descrita no plano, ou seja, concordemos que C está contida no plano P. Representa-se a inclusão entre conjuntos pelo símbolo $\subset$. Assim, $C \subset P$. Também vamos ter Cx$C \subset P$xP. Ou seja, o dónute CxC fugiu para a dimensão 4. Ajudou-nos a ver um pouco do espaço quadri-dimensional. Finalmente CxCxC *vi*ve em dimensão 6… Estes conjuntos C^n são usados na descrição das posições relativas de n movimentos circulares, assim como PxC é o conjunto de pares (posição-no-plano,posição-no-eixo), ou seja, pode descrever o movimento circular sobre o plano.
(cont.)

Rui Albuquerque
(Prof. Auxiliar no Dep. Matemática, Escola de Ciências e Tecnologia, Universidade de Évora)